

補注 1 失業継続期間と失業頻度（本文 7.7）－失業のフロー分析－

1 労働力調査結果「今月及び前月の就業状態別 15 歳以上人口」の補正

総務省「労働力調査」基本集計にある今月及び前月の就業状態別 15 歳以上人口から就業状態の変化を示す行列を計算する際に補正を加える。以下、その補正の趣旨と方法を説明する。

説明は、2013 年 1 月分の男性の統計を例にして行う。なお、補正は、男女計、男性、女性のそれぞれ、各月ごとに行う。

今月及び前月の就業状態別 15 歳以上人口は、総務省「労働力調査」2013 年 1 月分基本集計で言えば、第 I－7 表「今月及び前月の就業状態・農林業・非農林業・従業上の地位・雇用形態（非農林業雇用者については従業者規模）、年齢階級別 15 歳以上人口」にある統計である。この表は「政府統計の総合窓口（e-Stat）」でみることができる。この基本集計第 I－7 表の全産業、男性部分から所要の統計をピックアップしたものが、下表の黒字の数字である。下表は、表頭が前月末 1 週間における就業状態、表側が今月末 1 週間の就業状態である。前月末と今月末の就業状態の組合せの別に、同一個人の前月分調査票と今月分調査票が集計されたものである。

2013 年 1 月分の基本集計第 I－7 表の値、
2013 年 1 月分と 2012 年 12 月分の基本集計第 I－1 表の値（赤字）
（全産業、男性、単位：万人）

前月末 1 週間 今月末 1 週間		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		今月分調査結果※	前月末 1 週間の就業状態									
			総数	前月いた 15 歳以上人口	労働力人口	就業者	完全失業者	非労働力人口	就業状態不詳	前月 14 歳で今月 15 歳の者	前月いなかった者（転入）	
0	前月分調査結果※			5352	3742	3582	161	1608				
1	今月末 1 週間の就業状態	総数	5383	5242	3662	3493	168	1579	2	3	138	
2		今月いた 15 歳以上人口	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	138	
3		労働力人口	3753	3735	3632	3591	3439	152	41	0	0	103
4		就業者	3581	3551	3453	3429	3419	10	23	0	0	99
5		完全失業者	172	184	180	162	20	142	18	0	0	4
6		非労働力人口	1595	1615	1577	52	38	14	1524	0	3	35
7		就業状態不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8		前月いて今月いなかった者（転出その他）		32	32	19	16	3	13	0	0	0

出所 総務省「労働力調査」（基本集計）

また、上の表の赤字の数字は、左側の縦の列が 2013 年 1 月分基本集計第 I－1 表「就業状態・従業上の地位・雇用形態（雇用者については従業者規模）・農林業・非農林業別 15 歳以上人口」にある 15 歳

以上人口とその内訳で、上部の横の行が 2012 年 12 月分の同じ基本集計第 I－1 表にある 15 歳以上人口とその内訳である。表側の就業者についてみると、今月末が就業者である者は、前月末において就業者、完全失業者、非労働力、前月 14 歳であった、（国内に）いなかった、などの別に分かれるが、その総数は基本集計第 I－7 表では 3551 万人とされている。しかし、基本集計第 I－1 表では赤字の 3581 万人である。

このように数字が異なるのは、基本集計第 I－7 表が、前月と今月の両方で調査対象となった（調査票が揃っている）世帯に限って集計、復元したものであるためである。2013 年 1 月分であれば、2013 年 1 月分の基本集計第 I－7 表は、集計対象が 2012 年 12 月分調査の調査対象と共通になっている世帯に限ってあり、調査対象全体を使って集計、復元した基本集計第 I－1 表等の数字と必ずしも一致しない（15 歳以上人口は別に行われている「人口推計」と一致するように復元するので一致する。）。

労働力調査による各月の 15 歳以上人口とその内訳は、調査対象全体を使って集計、復元した基本集計第 I－1 表の数字が使われるのが普通である。以下、こちらの数字のことを‘公表値’と呼ぶことにする。基本集計第 I－7 表も公表値であるが、本補注では説明の便宜上、基本集計第 I－1 表の方の数字を公表値と呼ぶことにする。

この公表値と、就業状態の変化を示す行列が示す前月分と今月分の就業者数、完全失業者数、非労働力人口が可能な限り一致するように、基本集計第 I－7 表の数字の補正を施す。

以下、補正の方法をいくつかのステップに分けて順に説明する。説明の際、表の中の数字の参照を、例えば、今月就業者で、前月非労働力であった者 23 万人のように一々行くと煩わしい。表側の各区分に 0 から 8 までの数字を、表頭の各区分に 0 から 9 までの数字を振ってある。表の中の数字の参照は、表側区分と表頭区分の番号の組み合わせで行うことにする。例えば今月末就業者で、前月末非労働力であった者 23 万人は、表側区分が 4 番、表頭区分が 6 であるから、‘46’と参照する。

なお、本補注では、計算過程の数字を整数表示しているが、これは小数点以下を四捨五入して表示したものである。計算過程（最終結果も含む）で四捨五入は行わない。

Step 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	公表 値※ ¹	総数	15 歳 以上	労働 力	就業	失業	非労働 力	不詳	14 歳 以下	転入
0 公表値※ ²			5352	3742	3582	161	1608			
1 総数		5383	5352	3742	3582	161	1608	2	3	138
2 15 歳以上	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	138
3 労働力	3753	3753	3632	3591	3439	152	41	0	0	103
4 就業	3581	3581	3453	3429	3419	10	23	0	0	99
5 失業	172	172	180	162	20	142	18	0	0	4
6 非労働力	1595	1595	1577	52	38	14	1524	0	3	35
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		32	32	19	16	3	13	0	0	0

Step 1
21～61 を今月分の公表値に置き換える。
12～16 を前月分の公表値に置き換える。

加工した個所、結果を青字で表記する。

公表値の意味については本文参照。

Step 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	公表 値	総数	15 歳 以上	労働 力	就業	失業	非労働 力	不詳	14 歳 以下	転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5383	5352	3742	3582	161	1608	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3632	3591	3439	152	41	0	0	0
4 就業	3581	3581	3453	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	180	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1595	1577	52	38	14	1524	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		32	32	19	16	3	13	0	0	0

Step 2
09～89 をゼロとする。
(転入をゼロとする)

Step3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	公表 値	総数	15 歳 以上	労働 力	就業	失業	非労働 力	不詳	14 歳 以下	転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3742	3582	161	1608	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3632	3591	3439	152	41	0	0	0
4 就業	3581	3581	3453	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	180	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1595	1577	52	38	14	1524	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		32	32	19	16	3	13	0	0	0

Step 3
11 を 12 と 18 の合計と
する。
(総数を前月 15 歳以上
と 14 歳以下の合計とす
る)

Step 4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	公表 値	総数	15 歳 以上	労働 力	就業	失業	非労働 力	不詳	14 歳 以下	転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3632	3591	3439	152	41	0	0	0
4 就業	3581	3581	3453	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	180	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1577	52	38	14	1524	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 4

①81=11-21(総数と今月 15 歳以上の差を転出総数とする)
 ②82=81(転出総数は全員、前月 15 歳以上とする)
 ③82 を 13 と 16 の比で按分し、改めて 83、86 とする。(転出総数を前月労働力と前月非労働力の比で按分し、改めて転出した前月労働力と前月非労働力とする。)
 ④84=83、85=0、87=0、88=0、89=0
 (前月が失業、不詳、14 歳以下、転入区分の今月転出はゼロとする。)
 ⑤31=41+51 (本月) 労働力=就業者+失業者
 13=14+15' (前月) 労働力=就業者+失業者
 ⑥61=21-31' (本月) 非労働力=15 歳以上 - 労働力
 16=12-13' (前月) 非労働力=15 歳以上 - 労働力
 (就業状態不詳を調整してなくす。Step5 以下は濃い網掛けをしておく。)
 注意 この⑤と⑥の段階で、公表値と合わなくなることがある。上の例では、2013 年 1 月分調査結果では、就業状態不詳があるため、15 歳以上人口が労働力人口と非労働力人口の合計となっていない(1 月分調査結果 15 歳以上人口 5351 万人、労働力人口 3753 万人、非労働力人口 1595 万人)。ステップ 4 の結果、非労働力人口は 1598 となる。同様に前月の非労働力人口は 1609 万人となる。

Step 5	0 公表 値	1 総数	2 15 歳 以上	3 労働 力	4 就業	5 失業	6 非労働 力	7 不詳	8 14 歳 以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3591	3439	152	41	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	172	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	52	38	14	1524	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 5

①22=21-28 ～
62=61-68, 82=81-88
(今月 15 歳以上の内訳
は、それぞれ、総数と前
月 14 歳以下の差とす
る。)
②22=12-82 ～
26=16-86
(今月 15 歳以上の前月の
内訳は、総数と転出との
差とする。22 は通常
18=28 なので①と同じ。)

Step 6	0 公表 値	1 総数	2 15 歳 以上	3 労働 力	4 就業	5 失業	6 非労働 力	7 不詳	8 14 歳 以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3699	3439	152	54	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	172	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	41	38	14	1554	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 6

32、62、23、26、 $(36+63)/(33+36+63+66)$

を所与として、

33、36、63、66

を求める。具体的な手順は、本補注末尾に示す。

(今月の労働力及び非労働力、先月の労働力及び非労働力、さらに、先月と
今月で、労働力、非労働力の状態の変わらなかった者と、労働力から非労働
力へ、非労働力から労働力に移行した者の比率を所与として、改めて、労働
力、非労働力間の移動数を求める。)

Step 7	0 公表 値	1 総数	2 15 歳 以上	3 労働 力	4 就業	5 失業	6 非労働 力	7 不詳	8 14 歳 以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3699	3439	152	54	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3429	3419	10	30	0	0	0
5 失業	172	172	172	162	20	142	24	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	41	30	11	1554	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 7

63 を 64 と 65 の比で按分し、改めて 64、65 とする。

36 を 46 と 56 の比で按分し、改めて 46、56 とする。

(先月労働力から今月の非労働力に移った人数を、先月の就業からと、先月の失業からとに分ける。)

(先月非労働力から今月の労働力に移った人数を、今月の就業へと、今月の失業へとに分ける。)

Step 8	0 公表 値	1 総数	2 15 歳 以上	3 労働 力	4 就業	5 失業	6 非労働 力	7 不詳	8 14 歳 以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3699	3549	150	54	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3551	3419	10	30	0	0	0
5 失業	172	172	172	148	20	142	24	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	41	30	11	1554	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 8

34=24-64

35=25-65

43=42-46

53=52-56

(先月就業から非労働力を引いて、就業から労働力に移った数とする。)

(先月失業から非労働力を引いて、失業から労働力に移った数とする。)

(今月就業から先月非労働力を引いて、労働力から就業に移った数とする。)

(今月失業から先月非労働力を引いて、労働力から失業に移った数とする。)

Step 9	0 公表 値	1 総数	2 15 歳 以上	3 労働 力	4 就業	5 失業	6 非労働 力	7 不詳	8 14 歳 以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3699	3549	150	54	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3551	3534	16	30	0	0	0
5 失業	172	172	172	148	15	134	24	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	41	30	11	1554	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step9

43、53、34、35、 $(45+54)/(44+45+54+55)$

を所与として、

44、45、54、55

を求める。具体的な手順は、本補注末尾に示す。

(今月就業で先月労働力であった者、今月失業で先月労働力であった者、今月労働力で先月就業、今月労働力で先月失業、さらに、先月と今月で就業、失業の状態の変わらなかった者と、失業から就業へ、就業から失業に移行した者の比率を所与として、改めて、就業と失業間の移行をそれぞれ求める。)

ステップ9の表で、太枠で囲った黄色く塗ってある16個の数字が、本文で①～⑯としてある数である。これから、本文にあるように、次の3行3列の行列を得る。

(前月末1週間の就業状況)

	就業者	完全失業者	非労働力及び14歳以下
就業者	3534	16	30
完全失業者	15	134	24
非労働力及び転出その他	33	11	1558

同様の計算を男女計、男性、女性のそれぞれ、2013年1～12月の各月について行い、最後に12か月平均をとる。四捨五入は行わない。

注 ステップ6と9の計算

「本補注末尾で示す」とした計算は、A、B、C、Dと α を所与（ただし $0 < \alpha < 1$ 、 $A+B=C+D$ ）として、次の連立方程式を満たす x 、 y 、 z 、 w を求める計算である。A、B、C、Dは、ステップ6であれば、それぞれ‘23’、‘26’、‘32’、‘62’に相当する（□

x 、 y 、 z 、 w とA、B、C、Dの関係

$T=A+B=C+D$	A	B
C	x	y
D	z	w

で囲った箇所)。また、ステップ9であれば、それぞれ‘34’、‘35’、‘43’、‘53’に相当する。

$$\begin{aligned}
 x+z &= A \\
 y+w &= B \\
 x+y &= C \\
 z+w &= D \\
 y+z &= \alpha T \quad (T=A+B=C+D)
 \end{aligned}$$

この解は、

$$x = (C - B + \beta T) / 2$$

$$y = (C - A + \alpha T) / 2$$

$$z = (A - C + \alpha T) / 2$$

$$w = (B - C + \beta T) / 2$$

$$(\beta = 1 - \alpha \text{ と置いた})$$

である。（ $T=A+B=C+D$ を利用して、ほかにも色々な表し方がある。）

$y+z=\alpha T$ を除く4つの式だけでは、 $A+B=C+D$ という関係があるため、 x 、 y 、 z 、 w が求められない。 $y+z=\alpha T$ という条件を加えて、 x 、 y 、 z 、 w を求めるわけである。

この α として使用する値は、補正前において、就業状態が変化した者の全体に占める割合、つまり、ステップ6であれば労働力と非労働力間を移動した者の割合

$$(36+63) / (33+36+63+66)、$$

ステップ9であれば就業と失業間を移動した者の割合

$$(45+54) / (44+45+54+55)$$

とする。つまり、労働力と非労働力間を移動した者の割合、或いは、就業と失業間を移動した者の割合が補正前、補正後で変わらないように、状態間の移動量 x 、 y 、 z 、 w を求めるわけである。

参考 2013 年の数値

今月の状態	男女計 前月の状態			男性 前月の状態			女性 前月の状態		
	就業者	完全失業者	非労働力及び14歳以下	就業者	完全失業者	非労働力及び14歳以下	就業者	完全失業者	非労働力及び14歳以下

毎月の補正結果の平均 単位：万人

就業者	6194	32	85	3563	17	30	2632	16	54
完全失業者	27	209	29	13	135	14	13	74	16
非労働力及び 転出その他	83	27	4411	33	12	1536	50	14	2875

就業状態の変化を示す行列 A

就業者	0.98259	0.12083	0.01878	0.98717	0.10394	0.01921	0.97654	0.15000	0.01837
完全失業者	0.00423	0.78007	0.00650	0.00363	0.82137	0.00900	0.00495	0.71285	0.00530
非労働力及び 転出その他	0.01318	0.09910	0.97473	0.00920	0.07469	0.97179	0.01850	0.13715	0.97633

労働移動率行列 B $I + \log(A)$

就業者	0.98201	0.13666	0.01872	0.98679	0.11448	0.01907	0.97562	0.17756	0.01832
完全失業者	0.00478	0.75082	0.00739	0.00398	0.80254	0.01003	0.00585	0.66036	0.00627
非労働力及び 転出その他	0.01322	0.11251	0.97389	0.00924	0.08298	0.97090	0.01853	0.16207	0.97541

A 又は B のべき乗の収束値（各列が、定常状態における就業者、失業者、その他の構成比。各列同じである。）

就業者	0.58334	0.58334	0.58334	0.67533	0.67533	0.67533	0.49443	0.49443	0.49443
完全失業者	0.02286	0.02286	0.02286	0.02863	0.02863	0.02863	0.01753	0.01753	0.01753
非労働力及び 転出その他	0.39380	0.39380	0.39380	0.29604	0.29604	0.29604	0.48804	0.48804	0.48804

注 紙面では四捨五入して表示しているが、計算途中で四捨五入はしていない。

2 就業状態の変化を示す行列Aのべき乗の収束

本文の範囲であれば3次の正方行列について示せば事足りるが、一般に成り立つ性質なので、 n 次の行列で説明する。

以下、次項以降も含め、行列 $A = (a_{ij})$ 、 $(i, j = 1, \dots, n)$ を各成分が正で、各列の列和が1である n 次元の正方行列とする。各 i, j について、 $a_{ij} > 0$ 、 $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ である。極限 $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m$ の存在を示す。

(1) (正値、列和の継承性) 行列 A の m 乗 A^m も、各成分が正で、各列の列和が1である。

行列 $A = (a_{ij})$ の m 乗 A^m を $(a_{ij}^{(m)})$ と書く。 $A^{m+1} = AA^m$ であるから、

$$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(m)}$$

である。まず、 $a_{ij}^{(m)} > 0$ であれば、これから $a_{ij}^{(m+1)} > 0$ は明らかである。また、 $\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(m)} = 1$ であれば、

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(m)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{kj}^{(m)} = 1$$

となり、 $m+1$ でも成立する。数学的帰納法により、すべての m について列和=1が成り立つ。

(2) A の m 乗は、 m を無限大にすると、一定の行列 A^* に収束する。

A、B、Cの3段階に分けて示す。

A A^{m+1} の i 行の各成分と、 A^m の i 行の最大値と最小値、 A の各成分の最小値との関係

行列 $A = (a_{ij})$ の各成分の最小値を γ とする。 A の列和が1であるので、

$$0 < \gamma \leq 1/n \quad \text{①}$$

である。

また、 A^m の i 行の各成分 $a_{ik}^{(m)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)の最大値を $g_i^{(m)}$ 、最小値を $l_i^{(m)}$ とし、最大値、最小値を取る列 k の値をそれぞれ k_g 、 k_l とする（複数あればそのうちの1つ）。

$A^{m+1} = AA^m$ における i 行を考える。 A^m の i 行の各成分の1つは最小値 $l_i^{(m)}$ であり、その他は最大値 $g_i^{(m)}$ 以下であるから、

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(m+1)} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(m)} a_{kj} = l_i^{(m)} a_{k_l j} + \sum_{k \neq k_l} a_{ik}^{(m)} a_{kj} \\ &\leq l_i^{(m)} a_{k_l j} + \sum_{k \neq k_l} g_i^{(m)} a_{kj} = (l_i^{(m)} - g_i^{(m)}) a_{k_l j} + g_i^{(m)} \sum_{k=1}^n a_{kj} \\ &= g_i^{(m)} - (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) a_{k_l j} \leq g_i^{(m)} - \gamma (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \end{aligned} \quad \text{②}$$

最後の等式は列和が1であること、 γ がすべての成分の最小値であることを使った。

同様に、 A^m の i 行の各成分の1つは最大値 $g_i^{(m)}$ であり、その他は最小値 $l_i^{(m)}$ 以上であるから、

$$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(m)} a_{kj} = g_i^{(m)} a_{k_g j} + \sum_{k \neq k_g} a_{ik}^{(m)} a_{kj}$$

$$\begin{aligned}
&\geq g_i^{(m)} a_{kgj} + \sum_{k \neq kg} l_i^{(m)} a_{kj} = (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) a_{kgj} + l_i^{(m)} \sum_{k=1}^n a_{kj} \\
&= l_i^{(m)} + (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) a_{kgj} \geq l_i^{(m)} + \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})
\end{aligned} \tag{3}$$

②と③により、 A^{m+1} の i 行の各成分 $a_{ik}^{(m+1)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) について次の不等式が成立する。

$$l_i^{(m)} + \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \leq a_{ik}^{(m+1)} \leq g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \tag{4}$$

A^{m+1} の i 行の各成分は、 A^m の i 行の最大値、最小値、両者の差、さらに A の各成分の最小値で評価できることを表している。

B 各行の最大値、最小値の収束

④と、 $l_i^{(m+1)}, g_i^{(m+1)}$ の定義から、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
l_i^{(m)} + \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) &\leq l_i^{(m+1)} \leq a_{ik}^{(m+1)} \\
&\leq g_i^{(m+1)} \leq g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})
\end{aligned}$$

一番左の項はさらに

$$l_i^{(m)} \leq l_i^{(m)} + \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

一番右の項はさらに、

$$g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \leq g_i^{(m)}$$

である。これから、

$$l_i^{(m)} \leq l_i^{(m+1)} \leq g_i^{(m+1)} \leq g_i^{(m)}$$

よって、数列 $l_i^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$)は単調増加で上に有界、数列 $g_i^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$)は単調減少で下に有界である。それぞれ、極限が存在することがわかる。

C 行列の収束

数列 $g_i^{(m)}$ と $l_i^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$)の極限をそれぞれ g_i 、 l_i と置く。 $g_i = l_i$ が、以下のようにして示される。

④式により、

$$\begin{aligned}
g_i^{(m+1)} &\leq g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \\
-l_i^{(m+1)} &\leq -l_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})
\end{aligned}$$

辺々を足し合わせ、

$$g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \leq g_i^{(m)} - l_i^{(m)} - 2\gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) = (1 - 2\gamma)(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

よって、

$$0 \leq g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \leq (1 - 2\gamma)^m (g_i^{(1)} - l_i^{(1)}) \tag{5}$$

n が 2 以上であれば、行列の各成分の最小値は 2 分の 1 以下であるから、 $m \rightarrow \infty$ のとき、⑤式の右辺 $\rightarrow 0$ となり、 $g_i = l_i$ がわかる。(n=1 の場合は行列 $A = (1)$ で自明。)

この極限値を改めて α_i と書く。行列 $A = (a_{ij})$ の累乗 A^m の第 i 行は、 $m \rightarrow \infty$ のとき、各列の成分が全て α_i に収束する。すなわち、 $m \rightarrow \infty$ のときの A^m の極限を A^* と書けば

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ 各 } \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

である。

3 就業状態の変化を示す行列 A に対し、状態ベクトルの列 $X, AX, A^2X, \dots$ の極限の存在

就業状態の変化を示す行列 A 、各成分が正で和が 1 である状態ベクトル X に対し、ベクトルの列

$$X, AX, A^2X, A^3X, \dots$$

の極限が存在し A^*X であること。ここで、 $A^* = \lim_{m \rightarrow \infty} A^m$ 。

これを X^* と置くと、 X^* も状態ベクトルで、初期値 X によらず、また、 A^* を乗じて、 A を乗じても不変である。 $A^*X^* = X^*, AX^* = X^*$

ベクトル A^mX は、 A^m の列の線形結合（係数は X の各成分）であるから、極限があつて、 A^*X であることは明らか。

A^* は、前項 2 でみたとおり、 i 行の各列の値が等しく（2 と同様、 α_i と置く）、ベクトル X は成分の合計が 1 であるから、 $X^* = A^*X$ の第 i 成分は α_i である。つまり $X^* = A^*X$ は、

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

にほかならない。初期値 X に関係ない状態ベクトルである。

A^*X^* の第 i 成分は、 $\sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j$ で、 $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ であるから、これは α_i に等しい。つまり、 $A^*X^* = X^*$ 。

AX^* の第 i 成分は、 $\sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_k$ であるが、 $AA^m = A^{m+1}$ であるから、

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(m)} = a_{ij}^{(m+1)}$$

で（記号は 2 と同じ）、 m を ∞ にすることで、

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_k = \alpha_i$$

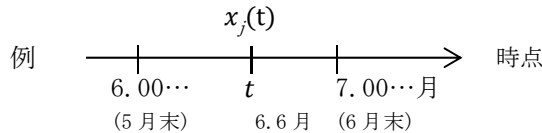
が成り立つ。つまり、 $AX^* = X^*$

4 就業状態の変化を示す行列と移動率行列との関係

一定の仮定のもとでは、 $B = (b_{ij}) = I + \log(A)$ で、移動率 b_{ij} が得られること。この B に関して、 $BX^* = X^*$ であること

状態 j から状態 i に 1 か月（単位期間）当たり移動する者の割合が b_{ij} で表され、 b_{ij} は時点や人数に依らない定数であるとする（ $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ ）。

状態 j の時点 t における人数を $x_j(t)$ と置く。時点は、月を単位とし、連続的に変化するものとする。



時点 t から Δt 月の間に、他の状態 i から状態 j に移る者の人数は、

$$\Delta t \cdot b_{ji} x_i(t)$$

であり、状態 j から他の状態 i に移る者の人数は、

$$\Delta t \cdot b_{ij} x_j(t)$$

である。ここで状態 i は、状態 j 以外のすべての状態である。 $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ 。

例えば、 b_{ij} が 0.1 であったとする。状態 j にある者は常に、1 か月あたり 0.1（1 割）の割合で状態 i に移動するということである。0.01 か月の間であれば、 0.01×0.1 の者が状態 i に移動する。 t が図の例のように 6.6 月であれば、6.6 月時点において状態 j にある者（ $x_j(t)$ だけいる）は、0.01 か月後の 6.61 月までの間に、 $0.01 \times 0.1 \times x_j(t)$ の者が状態 i に移動する。

今、 Δt が 0.01 か月というように十分短ければ、その間に、状態 j に移ってきた者が別の状態にまた移ったり、或いは状態 j から他の状態に移った者がまた戻ってきたりすることはないと考えられる。

すると、状態 j の時点 t における人数と時点 $t + \Delta t$ における人数の差 $x_j(t + \Delta t) - x_j(t)$ は、

$$\begin{aligned} x_j(t + \Delta t) - x_j(t) &= \sum_{i \neq j} (\Delta t \cdot b_{ji} x_i(t) - \Delta t \cdot b_{ij} x_j(t)) \\ &= \Delta t \sum_{i \neq j} (b_{ji} x_i(t) - b_{ij} x_j(t)) \end{aligned}$$

と表せる。ここで $b_{jj} = 1 - \sum_{i \neq j} b_{ij}$ と定義すれば、

$$\begin{aligned} x_j(t + \Delta t) - x_j(t) &= \Delta t \left(\sum_{i \neq j} b_{ji} x_i(t) + b_{jj} x_j(t) - x_j(t) \right) \\ &= \Delta t \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} x_i(t) - x_j(t) \right) \end{aligned} \quad \text{①}$$

行列 (b_{ij}) を B 、ベクトル $(x_j(t))$ を $X(t)$ と置き、 I を単位行列として、①を行列表示すると、

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \Delta t \cdot (B - I)X(t) \quad \text{②}$$

となる。すなわち、

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} = (B - I)X(t)$$

である。 Δt は十分短く、さらに、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{dX}{dt} = (B - I)X(t) \quad (3)$$

微分方程式②の基本解は、行列の指数関数

$$\exp(t(B - I)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B - I)^k}{k!} t^k$$

であり、 $X(0)$ を初期ベクトルとすれば、

$$X(t) = \exp(t(B - I))X(0) \quad (4)$$

が初期条件を満たす②の解である。

④から、 $X(T)$ と1か月経過後の $X(T + 1)$ の間には、

$$X(T + 1) = \exp(B - I)X(T) \quad (5)$$

という関係があることになる。

一方、 $X(T)$ から1か月経過後の $X(T + 1)$ は、就業状態の変化を示す行列 A によって、

$$X(T + 1) = AX(T) \quad (6)$$

という関係にある。したがって、

$$A = \exp(B - I) \quad (7)$$

これから、

$$B = I + \log(A) \quad (8)$$

となる。

ただし、 $\log(A)$ が求まるためには、行列 $A - I$ のノルムが1未満でなくてはならない。就業状態の変化を示す行列 A の場合、 $j=1, 2, \dots, n$ として、

$$|a_{jj} - 1| + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| = 2(1 - a_{jj})$$

であって、 A の対角成分（同じ状態が継続する割合）がすべて0.5より大きいときは、この最大値が1未満となる。

次に、就業状態の変化を示す行列 A （各 i, j について、 $a_{ij} > 0$ 、 $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ である行列）の定常ベクトル X^* は、 $B = I + \log(A)$ の定常ベクトルでもある、すなわち $BX^* = X^*$ となることを示す。

$$B = I + \log(A) = I + \log(I + (A - I)) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (A - I)^k$$

であって、 $AX^* = X^*$ 、すなわち $(A - I)X^* = 0$ であるから、

$$BX^* = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (A - I)^k \right) X^* = X^*$$

5 移動率が定常状態にあつては1か月間に移った総数の割合に相当すること

移動率 b_{ij} は、定常状態にあつては、前月末の状態 j から1か月の間に状態 i に移った総数*の前月末の状態 j の人数に対する割合に相当すること（*総数とは1か月の間に再度別の状態に移った者も含めた数のこと）

時点 t から Δt 月の間に、状態 j から状態 i に移る者の人数は、

$$\Delta t \cdot b_{ij} x_j(t)$$

である。前月末 T から今月末 $T+1$ まで間に、状態 j から i に移った者の総数は、一般に、

$$\int_{t=T}^{T+1} b_{ij} x_j(t) dt$$

となる。 b_{ij} が時間によらない定数であるから、

$$\int_{t=T}^{T+1} b_{ij} x_j(t) dt = b_{ij} \int_{t=T}^{T+1} x_j(t) dt$$

であり、さらに、今、定常状態で、状態 j にある者の数 $x_j(t)$ は常に一定（ X_j と置く）であるから、

$$\int_{t=T}^{T+1} b_{ij} x_j(t) dt = b_{ij} \int_{t=T}^{T+1} x_j(t) dt = b_{ij} X_j$$

したがって、前月末 T から今月末 $T+1$ まで間に、状態 j から状態 i に移った者の総数の状態 j の前月末における人数 $x_j(T) = X_j$ に対する割合は、 $b_{ij} X_j / X_j = b_{ij}$ となる。

6 失業頻度について

定常状態の状態ベクトルを $X^* = (l, u, n)$ として、

$$(b_{21}l + b_{23}n) / (l + u)$$

が、定常状態にあつては、1 か月間に発生する失業の総数の前月末の労働力人口に対する割合（すなわち失業頻度）に相当すること。

$(b_{21}l + b_{23}n) / (l + u)$ の分母、分子に15歳以上人口を乗じて考えるとわかりやすい。15歳以上人口 $\times l$ 、15歳以上人口 $\times u$ 、15歳以上人口 $\times n$ は、それぞれ就業者数、失業者数、その他の人数である。定常状態にあつては、それぞれ一定である。分子の15歳以上人口 $\times b_{21}l = 15$ 歳以上人口 $\times l \times b_{21} =$ 就業者数 $\times b_{21}$ は5で述べたように、1 か月間に就業状態から失業状態に移る者の総数、15歳以上人口 $\times b_{23}n = 15$ 歳以上人口 $\times n \times b_{23}$ は同様に1 か月間にその他の状態から失業状態に移る者の総数となる。この合計は、1 か月間に就業及びその他の状態から失業状態となった総数、つまり、発生した失業総数となる。分母の15歳以上人口 $\times (l + u)$ は、労働力人口にほかならない。 $(b_{21}l + b_{23}n) / (l + u)$ が、1 か月間に発生する失業総数の労働力人口に対する割合であることがわかる。

7 定常状態における失業率＝失業頻度×失業継続期間の成立

定常状態にあつては、

$$\frac{(b_{21}l + b_{23}n)}{(l + u)} \times \frac{1}{(b_{12} + b_{32})} = \frac{u}{(l + u)}$$

が成り立つこと。

今、 $1/(b_{12} + b_{32})$ を失業継続期間、 $u/(l + u)$ を定常状態の失業率と呼ぶことにすると、

失業頻度×失業継続期間＝定常状態の失業率

となる。

定常状態にあつては、 $BX^* = X^*$ である。この等式の第2行は、

$$b_{21}l + b_{22}u + b_{23}n = u$$

したがって、

$$b_{21}l + b_{23}n = u(1 - b_{22}) = u(b_{12} + b_{32})$$

左辺は1か月当たり就業状態とその他状態から失業状態に移る割合（新たに発生する失業の割合）、右辺が1か月当たり失業状態から就業状態とその他状態に移る割合（消滅する失業の割合）を表す。割合とは、15歳以上人口を1とした割合のことである。この等式は、定常状態では両者が等しいことを示す（定常状態であるから当然と言える。）。

この等式から、

$$\frac{(b_{21}l + b_{23}n)}{(l + u)} \times \frac{1}{(b_{12} + b_{32})} = \frac{u(b_{12} + b_{32})}{(l + u)} \times \frac{1}{(b_{12} + b_{32})} = \frac{u}{(l + u)}$$

8 失業状態から就業状態への移動率とその他の状態への移動率の和の逆数の意味について

失業状態から就業状態への移動率とその他の状態への移動率の和 $b_{12} + b_{32}$ の逆数 $1/(b_{12} + b_{32})$ には、二つの意味がある。

失業状態から就業状態への移動率とその他の状態への移動率の和 $b_{12} + b_{32}$ は、1か月当たり、失業から他の状態に移る割合（消滅する失業の割合）である。

一つは、定常状態にあつては、失業の発生から消滅までの期間の平均に相当すること。

定常状態にあつては、7でみたとおり、次が成立する。

$$\frac{(b_{21}l + b_{23}n)}{(l + u)} \times \frac{1}{(b_{12} + b_{32})} = \frac{u}{(l + u)}$$

両辺に $l + u$ を乗じ、さらに、15歳以上人口を乗じると、これは、

毎月、発生する失業者数× $1/(b_{12} + b_{32})$ ＝ストックとしての失業者数

であることを示す。

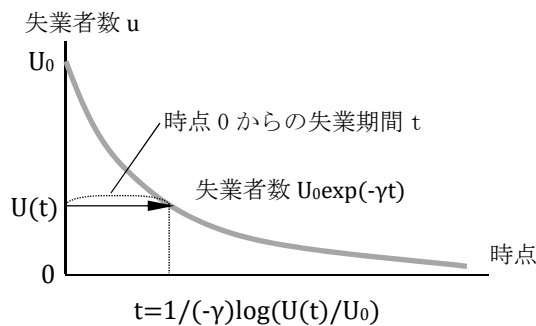
したがって、 $1/(b_{12}+b_{32})$ は、定常状態で一定となっているストックとしての失業者数と、毎月発生する失業者数の比率ということになる。定常状態では、毎月発生する失業数と毎月消滅する失業数が等しく、ストックとしての失業者数（15歳以上人口 $\times u$ ）が一定の状態である。発生した失業者は、この比率の期間だけ失業状態にとどまり、他の状態に移行する、つまり、この比率が、失業状態にとどまる期間の長さ(月数)に相当することになる。

もう一つは、ある時点の失業者たちが今後継続して失業状態にある期間の平均に相当すること。人数に依らず、1か月当たり、失業から他の状態に移る割合が $b_{12} + b_{32}$ であることが前提である。

時点0における失業者数を考える。 U_0 と置く。また、以下、 $\gamma = b_{12} + b_{32}$ と置く。継続して失業している者は、1か月当たり γ の割合で減じていく前提であるから、時点 t において時点0から継続して失業している数は、

$$U(t) = U_0 \exp(-\gamma t)$$

で表される（減少率は、 $(dU/dt)/U = -\gamma$ となる。）。



時点 t と $t + \Delta t$ の間に、失業者数は $U(t)$ から $U(t + \Delta t)$ に減る。この間に失業状態から外れた者の時点0以降の失業期間は t と置く。

時点0において U_0 だけいる失業者の失業期間の平均は、

$$\frac{1}{U_0} \int_0^{U_0} t \, du$$

である（上図）。 t は、 $U(t)$ を使って、

$$t = \frac{1}{-\gamma} \log \left(\frac{U(t)}{U_0} \right)$$

と表されるから、これは、

$$\frac{1}{U_0} \int_0^{U_0} t \, du = \frac{1}{U_0} \int_0^{U_0} \frac{1}{(-\gamma)} \log \left(\frac{U(t)}{U_0} \right) du = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{b_{12} + b_{32}}$$

となる。

補注2 UV 曲線の係数を求める計算について（本文 8.1）

欠員率 v の対数、雇用失業率 u の対数の間に想定する UV 曲線 $\log(u) = \alpha + \beta \log(v)$ の係数 α 、 β は、通常の最小二乗法で求めている。ダービン・ワトソン比が 1 を大きく下回り、残差に自己相関があるので、よりの確な係数を求めるため、誤差項に 1 階の自己相関があるとした

$$\log(u_t) = \alpha + \beta \log(v_t) + \rho e_{t-1} + \varepsilon \quad (*)$$

というモデル式を設定し、 α 、 β を求めている。

このモデル式では、通常の最小二乗法による α 、 β の推計はできず、次のようにして行っている（縄田和満著「EViews による計量経済分析入門」、朝倉書店、2009 年、89 頁参照）。

二つの時系列 X_t 、 Y_t の実績が与えられたとする。添え字は時点を表し、 $1, \dots, n$ とする。今の場合、2001 年第 1 四半期から 2006 年第 4 四半期など、関数を推定する期間における各四半期の欠員率の対数値、雇用失業率の対数値である。

- 1 実績 X_t 、 Y_t ($t = 1, \dots, n$) を使って、通常の最小二乗法（定数項あり）で、

$$Y_t = \text{定数項} + aX_t + \varepsilon$$

の定数項と a を求める。得られた定数項と a を使って、各時点 $t = 1, \dots, n$ における残差

$$e_t = Y_t - (\text{定数項} + aX_t)$$

を計算する。

- 2 計算した各時点 $t = 1, \dots, n$ における残差 e_t を使って、通常の最小二乗法（定数項なし）で、

$$\text{残差 } e_t = \rho \times 1 \text{ 期前の残差 } e_{t-1} + \varepsilon$$

の ρ を求める。つまり、 $e_1, \dots, e_n$ から、

$$\frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2}$$

を計算し、これを ρ と置く（定数項なしの最小二乗法で ρ を求める式）。

- 3 実績 X_t 、 Y_t ($t = 1, \dots, n$) と 2 で得られた ρ を使って、次の 3 本の時系列を計算する。

時点	R^*	X^*	Y^*
第 1 時点	$\sqrt{1 - \rho^2}$	$\sqrt{1 - \rho^2} X_1$	$\sqrt{1 - \rho^2} Y_1$
第 2 時点	$1 - \rho$	$X_2 - \rho X_1$	$Y_2 - \rho Y_1$
...	...	...	...
第 n 時点	$1 - \rho$	$X_n - \rho X_{n-1}$	$Y_n - \rho Y_{n-1}$

- 4 R_t^* 、 X_t^* 、 Y_t^* ($t = 1, \dots, n$) を使って、通常の最小二乗法（定数項なし）で、

$$Y_t^* = \alpha R_t^* + \beta X_t^* + \varepsilon$$

の α と β を求める。これらを求める α と β とする。

補足

モデル式(*)の α と β を求める方法は、コ克蘭・オーカット法など、他にもいくつかある。上で述べた方法の拡張として、得られた α と β をそれぞれ1の定数項と a として、1から再度、2、3、4を行うと、また新たな α 、 β が得られるが、この過程を、得られる α 、 β が一つ前の段階の α と β と変わらなくなる（或いは2の ρ が変わらなくなる）まで繰り返すという方法もある。また、最尤法の考え方で、計算機で数値的に α 、 β を求める方法もある。得られる結果は、方法によって若干異なる。